



Серия №27. Добавка

17 июля

1. Дан турнир G . Обозначим за $h(G, uvw \dots)$ количество гамильтоновых путей в графе G , содержащих фрагмент пути по стрелкам $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow \dots$. Если в турнире нет такого пути (т.е. стрелки направлены как-то иначе), то $h(G, uvw \dots) = 0$. Конец пути обозначим символом \clubsuit . Граф, получаемый из G выкидыванием вершины x со всеми стрелками, обозначим $G \setminus x$. Выделим в графе G некоторое ребро $a \rightarrow b$. Граф G' отличается от G только заменой направления этой стрелки.

а) Докажите, что $h(G, ab\clubsuit) = h(G \setminus b, a\clubsuit)$ и $h(G, \clubsuit ba) = h(G \setminus b, \clubsuit a)$.

б) Пусть в графе G есть фрагмент $a \rightarrow b \rightarrow x$. Направим в графе $G \setminus b$ стрелку из a в x . Докажите, для нового графа $G \setminus b$ выполнено равенство $h(G, abx) = h(G \setminus b, ax)$.

Индукцией по количеству вершин в турнире докажем лемму: чётность количества гамильтоновых путей в турнире не изменится, если поменять направление одной стрелки.

в) Докажите, что $h(G, abx) \equiv h(G \setminus b, ax) + h(G \setminus b, xa) \pmod{2}$.

г) Докажите лемму.

д) **Теорема Редди.** Докажите, что количество гамильтоновых путей в турнире нечётно.

2. В турнире чётное число вершин. Докажите, что в нём есть гамильтонов путь, который не дополняется до цикла.